CONOCIMIENTOS, CONTENIDOS Y CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Alexander Maz Machado
Universidad de Córdoba

1. CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Las matemáticas permiten a las personas comprender y resolver problemas en diversos ámbitos; por esta razón los procesos educativos relacionados con ellas están orientados a una adecuada construcción del conocimiento matemático en los alumnos. Socas y Camacho (2003) afirman que dicho conocimiento debe constituir el punto de partida para analizar los aspectos educativos que integran el aprendizaje matemático. El conocimiento matemático en los escenarios de aprendizaje social es un tipo importante de conocimiento profesional para los profesores porque se refiere a los procesos sociales e interactivos de comunicación y en gran medida condiciona las estrategias didácticas que utiliza el profesor.

En la escuela el conocimiento matemático adquiere significado como un cuerpo de conocimientos más general, que se institucionaliza socialmente en el contexto de los libros de texto, los planes de estudios, los proyectos de centro, las unidades didácticas, etc. (Steinbring, 1998). Para los estudiantes el conocimiento matemático es más personal; se encuentra asociado a los contextos ya que una de las principales actividades del alumno consiste en construir significados asociados a su propia experiencia; la socialización de este proceso se basa en la negociación de tales significados en una comunidad que ha hecho suyo ese proceso constructivo.

Esta socialización del conocimiento matemático hace necesario conocer las relaciones entre los significados matemáticos y sus jerarquías conceptuales. Debemos tomar en consideración que autores como Bishop (1999) recomiendan desarrollar los conceptos mediante actividades para destacar los significados y explicaciones que aportan las matemáticas. Además, los estándares curriculares del NCTM (2003) señalan que cada vez más se requieren conocimientos matemáticos cuyo significado este relacionado con la vida diaria, lo que permitirá a los alumnos tener mayores oportunidades y opciones para determinar su futuro.

Al respecto, Nonaka y Takeuchi (1995) indican que el conocimiento humano es de dos tipos:

> *"Uno es el conocimiento explícito que puede articularse en un idioma formal que incluye las declaraciones gramaticales, las expresiones matemáticas, especificaciones técnicas y los manuales. Este tipo de conocimiento puede transmitirse a los individuos fácilmente y de manera formal. El otro es el tipo más importante de conocimiento, es el conocimiento tácito, que es difícil de articular con el lenguaje formal. Es un conocimiento personal inculcado en el individuo por la experiencia e involucra factores intangibles como las creencias personales, las perspectivas, y el sistema de valores."* (p. viii).

Específicamente para el conocimiento matemático Steinbring (1998) identifica tres niveles: el científico, el escolar y el del alumno. En esta categorización el profesor como mediador de dicho conocimiento lo que hace es filtrarlo y adecuarlo a cada uno de los niveles donde se dirijan sus intereses (Figura 1).

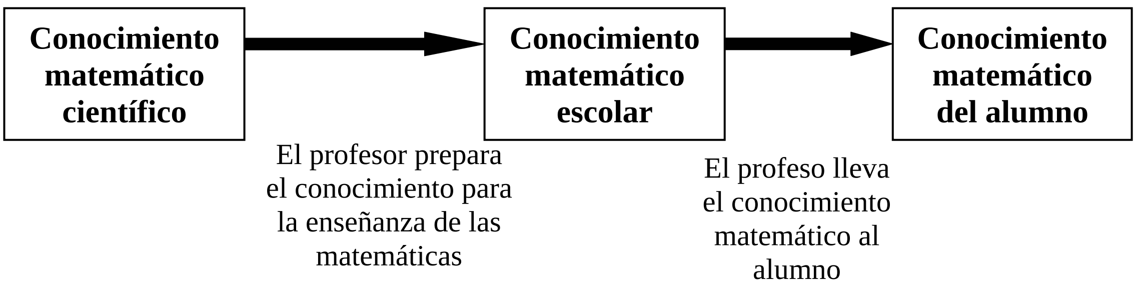

Figura1.

Este conocimiento matemático escolar se articula en el currículo alrededor de determinados contenidos temáticos, establecidos por la legislación educativa vigente, los cuales se organizan de forma lógica y estructurada para su enseñanza. Aunque como afirma Rico (2005, p.18) *"No obstante, los fenómenos del mundo real que llevan a un tratamiento matemático no están organizados lógicamente"*.

Lo que se ha puesto de manifiesto es que el profesor de matemáticas debe tener la capacidad de analizar desde un marco curricular el conocimiento matemático que va a enseñar para orientar la socialización de ese conocimiento a partir del significado compartido y además para adecuarlo al nivel tanto de su centro como de sus alumnos. Este análisis didáctico debe ser realizado desde los conceptos hasta los contenidos matemáticos.

2. ANÁLISIS CONCEPTUAL

El análisis conceptual es un método que a partir de descripciones, definiciones o listas extensivas, entre otros contenidos documentales, examina en detalle la diversidad de significados y las posibles conexiones entre los términos de cada campo conceptual; además de que *"contextualiza la definición dentro del área en que se inserta"* (Rico 2001 p. 186) y posibilita eliminar aquellas posibles inconsistencias debidas a una imprecisión en la utilización de los significados de los conceptos. Para efectuarlo debe tenerse claro qué es un concepto y un concepto matemático. Pérez (2002) define lo primero así:

> *"Un concepto es una abstracción de un conjunto de objetos, propiedades o eventos existentes en el mundo real o un mundo posible, que puede poseer una realización física en una lengua natural o sistema de representación determinados, al cual se puede hacer referencia mediante un símbolo arbitrario, aunque necesariamente único, dentro de un sistema representacional. Como constructo, posee ciertas propiedades distintivas de los demás conceptos, con los que guarda diversos tipos de relaciones. Tanto sus propiedades intrínsecas como sus relaciones con los demás conceptos deben ser evidentes, y por tanto susceptibles de ser especificados de forma explícita"*.

Los conceptos son representaciones mentales de objetos, las cuales tienen unas características relevantes que llegan a definir un tipo de objetos. Estas características son las propiedades que lo describen, lo hacen único permitiendo tanto diferenciarlo de otros como establecer relaciones con los demás conceptos.

Para Tall y Vinner (1981) un concepto son *"las palabras usadas para especificarlo. Puede ser personal o formal, siendo esta última la que es aceptada por la comunidad matemática"* (p. 152). Estas palabras son las definiciones y en matemáticas estas son de tipo terminológico, esto es, establecen la relación entre el concepto y el término que lo designa; estas definiciones también establecen y crean las relaciones entre los conceptos de un sistema conceptual (Sager, 1990).

Vinner (1991) señala que un esquema conceptual es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre asignado a un concepto dado. Puede ser una representación visual del concepto en el caso de que éste tenga representaciones visuales como en el caso de los conceptos geométricos

Todo concepto matemático tiene tres componentes: la simbólica que conecta al concepto con su etiqueta lingüística, la conceptual que lo relaciona con los fenómenos que representa y la cultural que lo ubica en su contexto de uso.

Tomemos como ejemplo a los números negativos, el signo (-) precediendo a un número natural es su etiqueta (Ej. -2,-3,-4, …), su condición de menor que cero lo relaciona con fenómenos contables, matemáticos o físicos y el campo de actuación bien como ampliación del campo numérico natural o como magnitudes relativas esta condicionado por el entorno cultural (o en su caso por el nivel académico).

Tall y Vinner (1981) afirman que el esquema conceptual se construye a lo largo de los años, mediante experiencias de todo tipo, cambiando cuando el individuo se encuentra con nuevos estímulos y hechos. A este respecto Vygotsky (1987) se preocupa por las maneras en que las personas desarrollan los conceptos con el tiempo. Señala que el significado de los conceptos es la unidad apropiada de análisis para estudiar el desarrollo de conceptos. A través de los significados que las personas atribuyen a las palabras, revelan los grados de abstracción que ellos han logrado en su pensamiento (Smagorinsky et al., 2003).

Vygotsky (1987) sostiene que el discurso de aquéllos que rodean al niño predetermina los caminos que el niño tomará en el desarrollo de las generalizaciones. Así, a través de sus interacciones con otras personas, los niños adquieren los significados apropiados que se sostienen por la cultura.

Los números naturales son un ejemplo de cómo el significado de un concepto va variando o enriqueciéndose en los niños mediante las interacciones con su entorno o zona de desarrollo próxima; en varios estudios empíricos se ha encontrado que incluso los infantes tienen una concepción intuitiva de cardinales pequeños como objetos discretos, luego vienen de las experiencias cotidianas y los funcionamientos lingüísticos contando los objetos, más adelante en la enseñanza formal de las matemáticas se fortalecen estos conceptos y así la concepción de la naturaleza discreta de números se ha basado en los mecanismos cognitivos innatos, en las experiencias de contar todos los días, y en la enseñanza formal de las matemática (Merenluoto & Lehtinen, 2004).

Desde diversos sectores (Bishop, 1999; Bolte, 1999; NCTM, 2003) se clama por que se anime a investigar las conexiones entre los diversos conceptos matemáticos y diversos temas, a orientar a los alumnos para que manifiesten y clarifiquen su propio pensamiento sobre los conceptos matemáticos y las situaciones asociadas. Para que la formación matemática sea coherente es necesario que los alumnos, a medida que se produce su desarrollo, conozcan y establezcan las conexiones referenciales entre los conceptos y las estructuras conceptuales; esto es crucial para un óptimo desarrollo cognitivo pues según autores como Vygotsky, Bruner y Ausubel, un niño alcanza la fase de aprendizaje conceptual durante la adolescencia (Kankkunen, 2001). El análisis conceptual es una herramienta útil para que el profesor analice cómo orientar estos procesos de acuerdo a los conceptos matemáticos que esté enseñando. Como señala el NCTM (2003, p. 21) *"la comprensión conceptual es un componente fundamental de las* *competencia"* En concordancia con estas ideas, la formación de maestros de matemáticas debe promover el desarrollo de este tipo de conocimiento.

A continuación se presenta una actividad realizada para un breve análisis del concepto de número a partir de la definición dada en dos textos de diferentes autores y épocas (Maz, 2005):

- *"Número es una cantidad cuyas partes eſtan diſcontinuadas aunque sea con imaginaria deſunion, ò diſcontinuacion"* (Ulloa, 1706; p. 5).

  De acuerdo a esto los números se forman agrupando unidades; el número se está refiriendo a lo discreto o discontinuo. Bajo esta idea el número se asocia a colecciones abstractas de objetos tangibles, este fundamento procede de una acción: "coleccionar unidades", que evidencia una correspondencia entre medida y longitud. Esta es una noción de número euclidiana, porque se apoya en los *Elementos* de Euclides.

- *"número es la relación que tiene una cantidad con otra de su misma especie,[...]"* (Verdejo, 1794; p. 4).

  Este autor no define el número en términos de la cantidad, sino que es aquello que la explica, de esta manera el número pasa a convertirse en la relación que se establece entre cantidades. Esta concepción de número permite que los números puedan combinarse de diversas formas para establecer distintos tipos de relaciones entre ellos. Esta es una noción relacional del número próxima a las ideas de Stevin y Newton.

A la luz de lo presentado surge de inmediato una pregunta ¿Por qué razón estos autores definen de forma tan diferente un mismo concepto matemático? La importancia de este interrogante es que permite reflexionar sobre algo que observamos que sucede de manera normal y reiterada en los manuales de texto actuales. Una de las explicaciones para este caso concreto tiene que ver con la distancia en el tiempo y las diferencias en el desarrollo de los conocimientos en cada época, esto se relaciona con el ámbito cultural que se había mencionado antes como elemento inherente a los conceptos matemáticos. El desarrollo de los conceptos involucra los valores de una cultura y sus prácticas; esto hace que a medida que la cultura va progresando y variando contribuye a que cambie la comprensión de los conceptos (Smagorinsky y otros, 2003).

Sin embargo, otro de los aspectos a considerar es que se tienen en cuenta distintos tipos de fenomenologías para el concepto, lo cual hace que los modelos que les representan también sean diferentes.

La idea es que en una misma comunidad sea esta educativa, académica o científica, los significados de los conceptos (matemáticos, físicos, etc.) sean similares. Sin embargo los individuos a veces asocian más de un concepto a un mismo un símbolo o término; por ejemplo, en matemáticas el signo menos (-) se asocia a los números negativos y también a la sustracción; Brown (1999) señala cómo los Físicos manejan dos conceptos diferentes de “tiempo” el relativístico y el de la mecánica clásica, y cómo ellos pueden cambiar fácilmente de uno de éstos al otro según lo requiera la situación. En este caso no hay ambigüedad en el concepto, como si sucede en el ejemplo del signo menos. Este autor sostiene además que en ocasiones los análisis conceptuales hechos por diferentes personas discrepan porque no han llegado a un análisis correcto de un concepto compartido, pero que a veces, sin saberlo, no están intentando analizar el mismo concepto.

Es un hecho que cada día los signos o símbolos y las representaciones ganan terreno en la comprensión y definición de los conceptos matemáticos así como en los procesos sociales de enseñanza y aprendizaje de los conocimientos matemáticos.

3. ANÁLISIS DE CONTENIDO

Cuando se trabaja en Educación Matemática y se estudian libros de texto, hay que considerar que los textos que se estudian y analizan son documentos didácticos y que, por tanto, el análisis de contenido ha de realizarse sobre la naturaleza didáctica de los documentos (Maz, 2005). Desde esta perspectiva, subrayamos que los textos no son documentos exclusivamente formales, sino que necesitan transmitir una pluralidad de significados para la correcta comprensión de los conceptos formales que presentan (Segovia y Rico, 2001). Es por ello por lo que el análisis de contenido debe contemplar esos diversos significados para ponerlo de manifiesto en toda su riqueza. La presentación del análisis de contenido de un libro de texto debe estar acompañada por los focos en que dicho análisis se centra y los criterios que van a utilizarse.

Gómez (2002, p. 263) señala que *"En el análisis de contenido se busca identificar y describir estructuradamente los diversos significados (…) de las matemáticas escolares y tiene en cuenta tres tipos de significados: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los modelos (análisis fenomenológico)"*. El análisis de contenido de un texto escolar de matemáticas se diversifica, pues, en tres tipos de análisis, según los significados antes mencionados: el que estudia la propia estructura conceptual matemática considerada; el que considera los diversos sistemas de representación utilizados para expresar los conceptos y el que realiza el análisis fenomenológico de los conceptos estudiados junto con los procesos de modelización en que tales conceptos se implican.

Utilizando los contenidos relativos a los números negativos vamos a presentar un corto ejemplo de análisis de contenido centrado en la fenomenología y los sistemas de representación (Maz, 2005).

3.1 FENOMENOLOGÍA Y MODELOS

El dominio usual de aplicación de los números negativos incluye unos tipos de situaciones, modelos y problemas relacionados con actividades cotidianas y con experiencias físicas y geométricas. Se trata de fenómenos que dan significado a los conceptos, estructuras e ideas matemáticas involucradas y que ponen en "funcionamiento" y, a la vez, organizan el conocimiento correspondiente. Los fenómenos que son utilizados para caracterizar a los números negativas se aglutinan en tres grupos: fenómenos físicos, contables y matemáticos; veamos cada uno de ellos:

3.1.1 FENÓMENOS FÍSICOS

Los autores recurren a fenómenos que se dan en la naturaleza y son explicados mediante leyes físicas. Se manifiesten seis clases de ellos:

a) *Desplazamientos.* Se apoyan en situaciones de avances o retrocesos de objetos. Estos son comparaciones de medidas dirigidas con sentidos opuestos

b) *Deformaciones.* Presentan contextos en los que algunos cuerpos son sometidos a una determinada fuerza en una u otra dirección.

c) *Fuerzas.* Se presentan analogías entre la acción y reacción de la tercera ley de Newton y las cantidades positivas y negativas.

d) *Temperaturas.* Las variaciones térmicas medidas en el termómetro respecto al valor del cero se utilizan para compararlas con el paso de valores positivos a los negativos a lo largo de la recta numérica.

e) *Capacidad*. La entrada y salida de productos o sustancias en lugares o recipientes sirve para suscitar símiles con los números negativos y positivos al efectuarse una operación matemática sobre ellos.

f) *Geográficos.* Alturas sobre y bajo el nivel del mar. Representaciones cartográficas del relieve.

3.1.2 FENÓMENOS CONTABLES

Están relacionados con el manejo de capitales mediante la relación debe-haber o deudas y ganancias; sirven, por tanto, para dar significado a las situaciones negativas. También las cotizaciones en bolsa se enmarcan en este grupo, así como las balanzas comerciales entre países.

3.1.3 FENÓMENOS MATEMÁTICOS

Se recurre a los objetos del mundo matemático para ilustrar los negativos. Se manifiestan cinco clases de ellos:

a) Comparaciones de orden. A través de comparaciones entre valores numéricos.

b) *Operaciones aritméticas*. Mediante adiciones o sustracciones.

c) *Operaciones algebraicas*. Se recurre a la extracción de raíces de expresiones algebraicas y a la resolución de problemas.

d) *Secuencias numéricas*. Las sucesiones y series permiten observar el posicionamiento de los valores numérico según su signo y valor.

e) *Posiciones o desplazamientos geométricos*. La recta numérica y los desplazamientos sobre ella, así como las traslaciones utilizando la circunferencia permiten "explicar" a algunos autores el cambio de signo en los números.

3.1.4 MODELOS

González, y otros (1990) señalan los principales modelos de presentación de los números enteros a nivel didáctico, entre los que destacan:

- Modelos aritméticos.
- Modelos algebraicos.
- Modelos geométricos.
- Modelos de fichas.
- Modelos basados en la recta numérica.

3.2 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Los sistemas de representación son los que permiten comunicar las ideas matemáticas que se quieren transmitir sobre el concepto de números negativo. En este caso sólo señalamos las representaciones escritas:

a) ***Verbales:*** se recurre a dar explicaciones de los fenómenos donde intervienen los números negativos mediante descripciones verbales.

b) ***Numéricas:*** sólo se utilizan combinaciones de números y signos para dar idea y explicar las cantidades negativas.

- Representación de los enteros como números relativos.
- Representación de los negativos como resultado de cálculos matemáticos.

c) ***Gráficas***: se recurre a la gráfica por medio de una recta, la cual contiene generalmente letras que indican lugares o posiciones

- Representación gráfica del producto cartesiano N x N.
- Representación de los enteros en la recta.

d) ***Algebraicas***: estas representaciones combinan los números con los signos y las letras; se utilizan las ecuaciones como recurso para mostrar cómo surgen y se operan las cantidades negativas.

- Pares ordenados
- Anillo ordenado

Referencias bibliográficas

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Traducción de Genís Sánchez. Barcelona: Paídos.

Bolte, L. (1999). Enhancing and assessing preservice teachers' integration and expression of mathematical knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education* 2: 167–185.

Brown, H. (1999). Why do conceptual analysts disagree? *Metaphilosophy,* Vol. 30 (1-2), 33-59.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA.* Vol. 7, Nº 3, pp. 251-292.

González, J. L.; Iriarte, M. D.; Jimeno, M.; Ortiz, A.; Sanz, E.; Ortiz, A., y Vargas-Machuca, I. (1990): *Números enteros.* Madrid. Síntesis.

Kankkunen, M. (2001). Concept mapping and peirce's semiotic paradigm Meet in the classroom environment. *Learning Environments Research* 4, 287–324.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada

Merenluoto, K., y Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction* (14), 519–534.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Nonaka, I., y Takeuchi, H. (1995). *The Knowledge-Creating Company; How Japanese Companies Create the Dynamics of Innovation*. New York: Oxford University Press.

Pérez, M. C. (2002). Explotación de los córpora textuales informatizados para la creación de bases de datos terminológicas basadas en el conocimiento. *Estudios de Lingüística Española* (*ELiEs*). Volumen 18. (Accesible desde http://elies.rediris.es/elies18/index.html).

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, pp 151-169.

Vinner, S. (1981). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematicas, en Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L. (2001). Análisis conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En Gómez, P. y Rico L, (eds.) *Iniciación a la investigación en educación matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada.

Rico, L. (2005). Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el estudio PISA 2003. En Instituto Nacional de Evaluación INECSE: *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de solución de problemas,* pp. 11-25. Madrid: MEC-INECSE-SUMA.

Sager, J. (1990). *A Practical Course in Terminology Processing.* Amsterdam/ Philadelphia: John Benjamins

Segovia, I., y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (ed): *Didáctica de las matemáticas en la educación primaria*; 11. 83-104. Madrid: Síntesis.

Socas, M., y Camacho, M. (2003). Conocimiento matemático y enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria. Algunas reflexiones. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol X, Nº 2, 151-171.

Seurfert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learning and Instruction 13, 227–237*

Schnotz,W., y Bannert, M. (2003) Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction 13. 141–156*

Smagorinsky, P., Cook, L. S., y Johnson, T. S. (2003). The Twisting Path of Concept Development in Learning to Teach. *Teachers College Record*, V. 105 (8), pp. 1399-1436

Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education* **1:** 157–189.

Ulloa, P. (1706). *Elementos matemáticos*. Tomo I. Madrid: Antonio González de Reyes, Impresor.

Verdejo, F. (1794). *Compendio de Matemáticas puras y mixtas*. Tomo primero. Madrid: Imprenta de la viuda de Ibarra.

Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. In R. Rieber & A. Carton (Eds.), *Collected works* (vol. 1, pp. 39–285). New York: Plenum.